



گزینه ۴

۱

طبق تعریف مشتق در $x = ۴$ ، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$$

در نتیجه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - ۶}{h} = ۲ \Rightarrow \begin{cases} f(4) = ۶ \\ f'(4) = ۲ \end{cases}$$

مشتق y را در $x = ۲$ حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{f(2x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{2f'(2x)x - f(2x)}{x^2} \xrightarrow{x=2} y'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4(2) - 6}{4} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴

۲

$$(fog)'(4) = ۴۵ \Rightarrow g'(4) \cdot f'(g(4)) = ۴۵$$

$g(4)$ و $g'(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$g(x) = ۴\sqrt{x} + x^2 \Rightarrow g(4) = ۸ + ۱۶ = ۲۴$$

$$g'(x) = \frac{۴}{2\sqrt{x}} + 2x \Rightarrow g'(4) = ۱ + ۸ = ۹$$

پس:

$$\underbrace{g'(4)}_9 \cdot \underbrace{f'(g(4))}_{24} = ۴۵ \Rightarrow 9f'(24) = ۴۵ \Rightarrow f'(24) = ۵$$

نکته: توابع به شکل $y = |f(x)|$ در ریشه‌های فقط ساده (غیرمکرر) داخل قدر مطلق، مشتق‌ناپذیر هستند. اگر به ازای این ریشه ساده، پشت قدر مطلق عامل صفرشونده دیده شود، تابع در این ریشه ساده داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر صفر دارد. باتوجه به نکته فوق، ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$3x^4 + x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x^3 + x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^3 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله درجه سوم $3x^3 + x - 4 = 0$ ، چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک ریشه قطعاً $x = 1$ خواهد بود. چون این عبارت به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس این عبارت اکیداً صعودی بوده و نمی‌تواند بیش از یک جا، محور x ها را قطع کند. بنابراین معادله $3x^3 + x - 4 = 0$ ، تنها دارای ریشه ساده $x = 1$ است.

باتوجه به توضیحات بالا، عبارت داخل قدر مطلق دارای دو ریشه ساده $x = 0$ و $x = 1$ است و دیگر ریشه‌ای ندارد. چون به ازای $x = 0$ عبارت پشت قدر مطلق صفر می‌شود، نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع در $x = 0$ صفر است. پس تابع تنها در $x = 1$ ، مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

معادله خط d را می‌یابیم:

$$d \text{ شیب خط} = m_d = \frac{0 - 4}{12 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 12) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4$$

مقدار تابع $g(x)$ در $x = 3$ با مقدار $y = -\frac{1}{3}x + 4$ در $x = 3$ برابر است، یعنی:

$$g(3) = -\frac{1}{3} \times 3 + 4 = 3 \Rightarrow g(3) = 3$$

همچنین شیب خط مماس بر $g(x)$ در $x = 3$ با شیب خط d برابر است، یعنی:

$$g'(3) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^2(x) - 4g(x) + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x) - 3)(g(x) - 4)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \right) \times \lim_{x \rightarrow 3} (g(x) - 4)$$

$$= g'(3) \times (g(3) - 4) = -\frac{1}{3} \times (3 - 4) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^3 - 3x}}{x^2 + 1} \right)^3$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(3x^2 - 3)}{2\sqrt{x^3 - 3x}}(x^2 + 1) - 2x\sqrt{x^3 - 3x}}{(x^2 + 1)^2} \times 3 \left(\frac{\sqrt{x^3 - 3x}}{x^2 + 1} \right)^2$$

$$\xrightarrow{x=-1} \frac{0 + 2\sqrt{2}}{4} \times 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

کافی است $f'(\frac{3}{2})$ را حساب کنیم:
در همسایگی $\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} [x^2] = [\frac{9}{4}] = 2 \\ |2x - 4| = -2x + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{10x - 3}{3x - 2x + 4} = \frac{10x - 3}{x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{43}{(x + 4)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{3}{2}) = \frac{43}{(\frac{11}{2})^2} = \frac{172}{121}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \times \frac{f(x+h) + f(x-h)}{1} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right) \times \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h) + f(x) - f(x)}{h} \right) \times (f(x) + f(x)) \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right) \times 2f(x) \\
 &= \left(x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{xh} - (-x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-xh} \right) \times 2f(x) \\
 &= (xf'(x) - (-x)f'(x)) \times 2f(x) = 10f'(x)f(x) = 10 \times 3 \times 4 = 120
 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a-nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} &\times \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h)) \\
 &= \left(\frac{x - (-x)}{1} \right) f'(x) \times 2f(x) = 10f'(x)f(x) = 10 \times 3 \times 4 = 120
 \end{aligned}$$

ابتدا از دو طرف تساوی مشتق می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 0 \Rightarrow f'(x)g(x) = -g'(x)f(x) \\
 \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} &= -\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x=3} \frac{f'(3)}{g'(3)} = \frac{-f(3)}{g(3)}
 \end{aligned}$$

توجه کنید که چون حاصل $f(3)$ برابر یک عدد ثابت می‌باشد، مشتق آن صفر است.

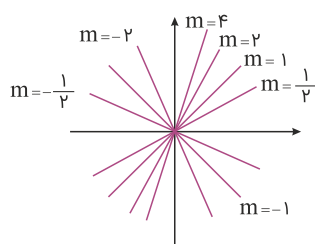
توجه: آهنگ لحظه‌ای در x_0 برابر با $f(x_0)$ است و آهنگ متوسط در بازه $[x_1, x_2]$ برابر با $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است.

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 12 + 4b \end{cases} \Rightarrow 12 + 4b = 4 \Rightarrow b = -2$$

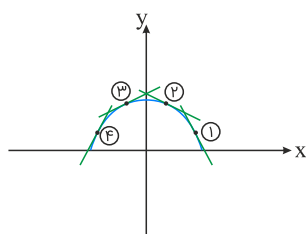
$$f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{(2/1)^2(0/1) - 0}{0/1} = 4/41$$

شیب خط مماس برابر با تغییرات عمودی خط به تغییرات افقی است. در شکل زیر شیب چند پاره‌خط مشخص شده است.



پس اگر خطوط مماس بر نمودار را رسم کنیم، داریم:



$$m_4 > m_3 > m_2 > m_1$$

m_4 و m_3 مثبت و m_2 و m_1 منفی هستند.

در هر دو حد داده شده، چون مخرج کسرها صفر می‌شوند و حاصل حدود برابر با عدد حقیقی شده‌اند، باید ابهام $\frac{0}{0}$ داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{x^3 - 8} = 2 \Rightarrow g(2) + 2 = 0 \Rightarrow g(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{(x - 2)(\underbrace{x^2 + 2x + 4}_{12})} = 2 \Rightarrow \frac{1}{12} g'(2) = 2 \Rightarrow g'(2) = 24$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(-2 - h) + 1}{h^2 - 2h} = -1 \Rightarrow f''(-2 - h) + 1 = 0 \Rightarrow f''(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(-2 - h) + 1)(f'(-2 - h) - f(-2 - h) + 1)}{h(h - 2)} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(f(-2 - h) + 1)}{-h}}_{f'(-2)} \times \frac{(f'(-2 - h) - f(-2 - h) + 1)}{-(h - 2)} = -1$$

$$\Rightarrow f'(-2) \times \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) = \frac{-2}{3}$$

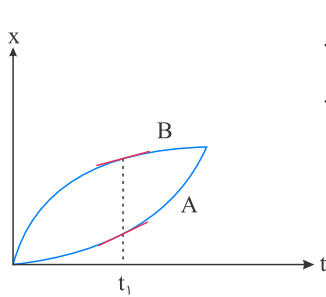
$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow f(g(2)) = f(-2) = -1 \\ (f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 24f'(-2) = 24 \times \frac{-2}{3} = -16 \end{cases}$$

عرض از مبدأ خط مماس $\Rightarrow y + 1 = -16(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = 31$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های ۱ و ۴: باتوجه به نمودار از لحظه‌ای که دو دونده به هم می‌رسند به بعد، دونده A جلوتر خواهد بود و این به این معنا است که دونده A زودتر به مقصد می‌رسد؛ اما به شرطی که حرکت آن‌ها ادامه می‌داشت اما در لحظه $t = t'$ حرکت آن‌ها تمام می‌شود و هر دو باهم به مقصد می‌رسند.

گزینه ۲: باتوجه به نمودار، در لحظه $t = t_1$ بیشترین مقدار فاصله رخ می‌دهد و در این لحظه شیب خط مماس بر منحنی دو نمودار یکسان است و از آنجا که شیب نمودار مکان برحسب زمان، تعیین‌کننده سرعت لحظه‌ای است، می‌توان گفت در این لحظه سرعت دو دونده برابر است.



گزینه ۳: سرعت متوسط از لحظه $t = 0$ تا $t = a$ برابر شیب خط واصل بین دو نمودار در این دو نقطه است؛ باتوجه به آنکه مبدأ زمانی برای هر دو متحرک $t = 0$ در نظر گرفته شده است، باید در هنگام $t = a$ مکان دو متحرک هم یکسان باشد که این اتفاق فقط یکبار رخ می‌دهد. به بیان دیگر اگر توابع مکان برحسب زمان دونده‌های A و B را به ترتیب $A(t)$ و $B(t)$ بنامیم باید داشته باشیم:

$$\frac{A(a) - A(0)}{a - 0} = \frac{B(a) - B(0)}{a - 0} \Rightarrow A(a) = B(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = 2x$$

بنابراین $f'(x) = 2x$ است. می‌دانیم مشتق توابعی به فرم $f(x) = x^2 + a$ برابر $2x$ می‌شود، همچنین داریم $f(0) = -2$ پس:

$$f(0) = 0 + a = -2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

حال معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(2 - \sqrt[3]{x}) - \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)(\sqrt{x} + 1)}{(2 - \sqrt[3]{x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)(2 - 1) - \left(\frac{-1}{1}\right)(1)}{(2 - 1)^2} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 7} \frac{f(t) - f\left(\frac{3t+7}{4}\right)}{\frac{t-7}{4}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{t \rightarrow 7} \frac{f'(t) - \frac{3}{4}f'\left(\frac{3t+7}{4}\right)}{\frac{1}{4}} = \lim_{t \rightarrow 7} \frac{\frac{1}{4}f'(t)}{\frac{1}{4}} = f'(7)$$

$$f(x) = x\sqrt{2x+2} \Rightarrow f'(x) = (1)\sqrt{2x+2} + \frac{x}{\sqrt{2x+2}} \Rightarrow f'(7) = 4 + \frac{7}{4} = \frac{23}{4}$$

باتوجه به فرمول‌های تعریف مشتق، در اینجا $f'_-(a) - f'_+(a)$ خواسته شده است.
روش اول:

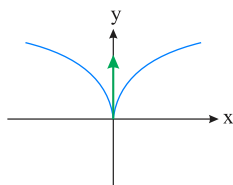
با استفاده از فرمول تعریف مشتق:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-b) \sqrt[3]{(x-a)^2} - 0}{x-a} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-b) \sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[3]{x-a}} = \frac{a-b}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-b) \sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[3]{x-a}} = \frac{a-b}{0^-} = +\infty \end{cases} \quad (a < b)$$

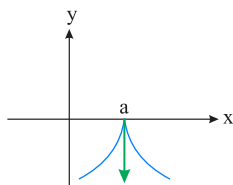
$$\Rightarrow f'_-(a) - f'_+(a) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

روش دوم:

با بررسی نمودار تابع در اطراف $x = a$ می‌دانیم تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ به صورت زیر است که در $x = 0$ نیم‌ماس‌های قائم دارد.



چون $a < b$ ، تابع f در نزدیکی $x = a$ منفی است و نمودار f به صورت زیر است. چون قبل از a نمودار صعودی است، پس $f'_-(a) \rightarrow +\infty$ و بعد از a ، نمودار نزولی است، پس $f'_+(a) \rightarrow -\infty$ و در نتیجه:



$$f'_-(a) - f'_+(a) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

می‌دانیم هر قدر بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم تا به $t = 2$ نزدیک شویم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ برابر است با:

$$d'(2) = 10 - 2(2) = 6$$

ابتدا حاصل حد داده شده را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2) - f(2 - 3h)}{-h} \xrightarrow[\text{HOP}]{\text{ایهام}} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(-3)f'(2 - 3h)}{-1} = -3f'(2^+) = -3f'_+(2)$$

$\downarrow$
 منفی

چون به ازای $x = 2$ عبارت داخل جزء صحیح، برابر مقدار صحیح ۱ می‌شود و در این نقطه عبارت داخل جزء صحیح، اکیداً صعودی است، پس تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ پیوستگی راست داشته و مشتق راست آن قابل محاسبه است. داریم:

$$f'_+(2) = (x^3 \left[\frac{2x-1}{x+1} \right])' = (x^3 \times \underbrace{\left[\frac{2x-1}{x+1} \right]}'_1) = 3x^2 \xrightarrow{x=2} 12$$

$\downarrow$
 در ۲ اکیداً
 صعودی است

$$\Rightarrow \text{جواب حد} = -3f'_+(2) = -3 \times 12 = -36$$

ابتدا مشتق تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \frac{9(2\sqrt{x}) - (9x - 4) \left(2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow g'(4) = \frac{9(4) - 32 \left(\frac{1}{2} \right)}{16} = \frac{36 - 16}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}, \quad g(4) = \frac{9(4) - 4}{2\sqrt{4}} = 8$$

$$(f \circ g)'(4) = f'(g(4)) \times g'(4) = f'(8) \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x - 2} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{t} - 2} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{2}{t}\left(t - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \left(-\frac{t}{2}\right) \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} F'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow F'\left(\frac{1}{2}\right) = -16$$

نقطه B روی نمودار است، پس مختصات آن به صورت $(\alpha, \frac{1}{\alpha^3})$ است. خط داده شده در $x = \alpha$ بر نمودار مماس است؛ پس:

$$f'(\alpha) = a_{AB}$$

$$a_{AB} = \frac{3 - \frac{1}{\alpha^3}}{0 - \alpha} = \frac{\frac{3\alpha^3 - 1}{\alpha^3}}{-\alpha} = \frac{3\alpha^3 - 1}{-\alpha^4}$$

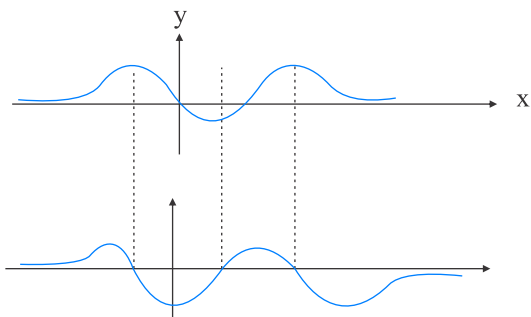
$$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 3x^2(1)}{(x^3)^2} = \frac{-3x}{x^6} = \frac{-3}{x^3}$$

$$\begin{cases} f'(\alpha) = \frac{-3}{\alpha^3} \\ f'(\alpha) = a_{AB} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{\alpha^3} = \frac{3\alpha^3 - 1}{-\alpha^4} \xrightarrow{\alpha \neq 0} 3 = 3\alpha^3 - 1 \Rightarrow \frac{3}{3} = \alpha^3 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

باتوجه به شکل $\alpha = -1$ قابل قبول است، پس $B(-1, 1)$ است. حالا طول پاره خط AB را می یابیم:

$$AB = \sqrt{(0 + 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

نقاطی که در آنها مقدار مشتق صفر است، مشخص شده است. دقت کنید که در $x \rightarrow \pm\infty$ مقدار مشتق تقریباً صفر است، چون تابع افقی شده است.



نکته: اگر g در a و f در $g(a)$ مشتق پذیر باشد، تابع $f \circ g$ در $x = a$ مشتق پذیر است.

$$\text{الف: } (f \circ g)'(0) = g'(0) \underbrace{f'(g(0))}_{= -1} = (-1) \times 0 = 0$$

$$\text{ب: } (g \circ f)'(1) = f'(1)g'(f(1)) = 0 \times g'(2) = 0 \text{ وجود ندارد}$$

چون g در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

$$\text{ج: } (f \circ f)'(-1) = f'(-1)f'(f(-1)) = 1 \times f'(1) = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{د: } (g \circ g)'(\frac{3}{2}) = g'(\frac{3}{2})g'(g(\frac{3}{2})) = 4 \times g'(2) = 4 \times 0 = 0 \text{ وجود ندارد}$$

چون g در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

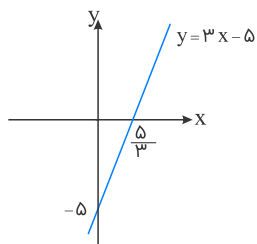
پس توابع قسمت های "الف" و "ج" مشتق پذیرند.

ابتدا معادله خط مماس را با داشتن نقطه و شیب می نویسیم:

$$y = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x} \Rightarrow y' = 0 + \frac{3}{x^2}$$

$$A(1, -2) \quad f'(1) = 3 = m_A$$

$$y - y_A = m_A(x - x_A) \Rightarrow y - (-2) = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 - 2 \Rightarrow y = 3x - 5$$



$$S = \frac{5(\frac{5}{3})}{2} = \frac{25}{6}$$

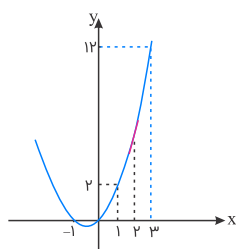
باید نقطه‌ای را روی نمودار بیابیم که در آن شیب خط مماس یا همان مشتق تابع، برابر با شیب خط قاطع دو نقطه $x = 1$ و $x = 3$ واقع بر منحنی باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$y = x^2 + x$$

$$y' = 2x + 1$$

$$x = 1, 3 \text{ شیب قاطع دو نقطه به طول‌های } 1, 3 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

$$y' = 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$$



نکته: ثابت می‌شود برای تابع $y = ax^2 + bx + c$ زمانی که در بازه $[m, n]$ تعریف می‌شود، همواره شیب مماس در نقطه وسط بازه یعنی $x = \frac{m+n}{2}$ ، موازی خط واصل اول و آخر بازه است.

ابتدا لحظه $t = t_0$ را به دست می‌آوریم:

$$P'(t) = 6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3s$$

حال بیشترین مقدار ماده تولید شده را می‌یابیم:

$$P(3) = 9gr$$

و مقدار ماده داخل ظرف در لحظه $t = 4$ برابر است با:

$$P(4) = 8gr$$

درنتیجه یک گرم از ماده تولید شده از بین رفته است؛ یعنی $\frac{100}{9} \simeq 11\%$.

از روی شکل واضح است که شیب مماس در نقاط B و C صفر است، زیرا خط‌های مماس در این نقاط، افقی هستند. ضمناً قدرمطلق شیب خط مماس در D بیشتر از قدرمطلق شیب مماس در E است.

می‌دانیم خطوط موازی دارای شیب برابر هستند، پس داریم: $a_{d_1} = a_{d_2}$
با توجه به شکل نقاط $(0, y_2)$ و (λ, y_1) روی خط d_1 هستند. ابتدا مقادیر y_2 و y_1 را به دست می‌آوریم:

$$y_1 = \frac{f(\lambda) - 5}{\lambda + 1} = \frac{32 - 5}{9} = 3 \Rightarrow (\lambda, 3)$$

$$y_2 = \frac{f(0) - 5}{0 + 1} = -5 \Rightarrow (0, -5)$$

حالا می‌توانیم با داشتن دو نقطه شیب خط d_1 را به دست آوریم.

$$a_{d_1} = \frac{3 - (-5)}{\lambda - 0} = +1 \Rightarrow a_{d_1} = a_{d_2} = +1$$

از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر +1 قرار می‌دهیم تا محل برخورد خط d_2 و تابع را بیابیم.

$$y' = \frac{f - (-5)}{(x+1)^2} = +1 \Rightarrow 9 = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

با توجه به شکل مقدار $x = -4$ غیرقابل قبول است.

حالا با داشتن شیب خط d_2 و یک نقطه از آن معادله آن را بیابیم.

$$a_{d_2} = +1, (2, 1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{y=0} x = 1$$

خط d_2 محور طول‌ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\sqrt{v} + h) - f'(\sqrt{v})}{h} = f''(\sqrt{v})$$

$$f(x) = \sqrt{x^v + 1} = (x^v + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times vx(x^v + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= x(x^v + 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = (x^v + 1)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x)(vx)(x^v + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = \sqrt{v} : f''(\sqrt{v}) = 9^{\frac{-1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{v})(\sqrt{v})(9)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

ابتدا عرض نقطه‌ای با طول ۴ روی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{-8}{4-3}} = -2$$

شیب خط مماس برابر مشتق تابع در این نقطه است.

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{-2x}{x-3}\right)^2}} \times \frac{-2(x-3) - (-2x)}{(x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{x=4} y'(4) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} \times \frac{6}{(1)^2} = \frac{1}{12} \times 6 = \frac{1}{2}$$

معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y = \frac{1}{2}x + a \xrightarrow[\text{معادله صدق می‌کند}]{\text{نقطه } (4, -2) \text{ در}} -2 = 2 + a \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$$

در نهایت محل تقاطع این خط با نیمساز ربع دوم و چهارم را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases} \Rightarrow -x = \frac{1}{2}x - 4 \Rightarrow 4 = \frac{3}{2}x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{-8}{3} \end{cases}$$